数理解析研究所講究録
649巻 1988年 126-132

NORMAL COVER について

神奈川大・工 矢島幸信 (Yukinobu Yajima)

Tukey [7] によって与えられた Normal Cover という概念は，位相空間論においては極めてよく知られている基本的な概念である。 それは，Michael [2]，Morita [4, 5]，Stone [6] によって研究され，いくつかの完全な characterization が与えられた。 しかし，それらの characterization のほとんどには，locally finite 性が深く関与していることに気付くであろう。 そこで，

「locally finite 性をもっと弱めた形で，normal cover を characterize できないか？」

という問題提起が，このクラシカルな話題を取り上げた理由である。 その弱い条件として，Michael [3] が paracompact space を characterize するために導入した cushioned 性を考える。 ただし，もとの空間は一般の topological space では不十分で，normal cover を扱うためにもっとノーマルな空間，つまり normal space 上で議論しよう。

X を topological space, $\mathcal{G}$ を X の cover とする。
$\mathcal{U}$ が, $\mathcal{G}$ の <u>refinement</u> であるとは, $\mathcal{U}$ が X の cover であり, 任意の $U \in \mathcal{U}$ がある $G \in \mathcal{G}$ に含まれるとき。

さらに, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ を X の cover とする。 $\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ の <u>star-refinement</u> であるとは, 任意の $V \in \mathcal{V}$ に対して

$$St(V, \mathcal{V}) = \bigcup \{ W \in \mathcal{V} \mid W \cap V \neq \phi \}$$

がある $U \in \mathcal{U}$ に含まれるとき。

<u>定義</u> 1 (Tukey [7]). space X の open cover $\mathcal{G}$ が, <u>normal</u> であるとは, X の open cover からなる列 $\{\mathcal{U}_n\}$ で, $\mathcal{U}_1 = \mathcal{G}$, 各 $\mathcal{U}_n$ は $\mathcal{U}_{n-1}$ の star-refinement となるものが存在するとき。

次の定理は, paracompact space と normal cover が密接に関係していることを示していると共に, 我々の問題は paracompact space 上で考えることは無意味であることを意味している。

<u>定理</u> 0 (Stone [6]). T_2-space X に対して, 次は同値.

(1) X は, paracompact である。

(2) X の任意の open cover は, normal である。

次に，まず normal cover のクラシカルな characterization を述べておくことにする．

<u>定理</u> 1 (Michael [2], Morita [4, 5], Stone [6]).
space X とその open cover $\mathcal{G}$ に対して，次は同値。

(1) $\mathcal{G}$ は，normal である。

(2) ある metric space M と連続写像 $f: X \xrightarrow{\text{onto}} M$ が存在して，M のある open cover $\mathcal{U}$ に対して $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ が $\mathcal{G}$ を refine する。

(3) $\mathcal{G}$ は，locally finite cozero refinement をもつ。

(4) $\mathcal{G}$ は，σ-discrete cozero refinement をもつ。

(5) $\mathcal{G}$ は，σ-locally finite cozero refinement をもつ。

(注意) $U \subset X$ が，<u>cozero</u> であるとは，ある連続関数 $g: X \longrightarrow [0, 1]$ が存在して，$U = \{x \in X \mid g(x) > 0\}$ となるとき。

<u>定義</u> 2 (Michael [3]). $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ を space X の subset の collection とする。$\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ の中で <u>cushioned</u> であるとは，任意の $V \in \mathcal{V}$ に対して，ある $U_V \in \mathcal{U}$ が対応しており，任意の $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ に対して

$$Cl(\cup\{V \mid V \in \mathcal{V}'\}) \subset \cup\{U_V \mid V \in \mathcal{V}'\}$$

が成り立つとき。

$\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ の中で <u>σ-cushioned</u> であるとは，$\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ で各 $\mathcal{V}_n$ は $\mathcal{U}$ の中で cushioned と表わされるとき。特に，$\mathcal{V}$ が <u>それ自身の中で σ-cushioned</u> であるとは，$\mathcal{V}$ が $\mathcal{V}$ 自身の中で σ-cushioned であるとき。

さて，normal space における normal cover は，次のように characterize される。

<u>定理</u>2 (Yajima [9, 10]). normal space X とその open cover $\mathcal{G}$ に対して，次は同値．

(1) $\mathcal{G}$ は，normal である。

(2) $\mathcal{G}$ は，locally finite open refinement をもつ。

(3) $\mathcal{G}$ は，open refinement $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ で，各 $\mathcal{V}_n$ が $\mathcal{V}_{n+1}$ の中で cushioned となるものをもつ。

(4) $\mathcal{G}$ は，それ自身の中で σ-cushioned である open refinement をもつ。

σ-cushioned の概念は，次の形でさらに一般化される。

<u>定義</u>3 (Vaughan [8]). $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ を space X の subset の collection とする。 $\mathcal{V} = \{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ が $\mathcal{U}$ の中で <u>linearly cushioned</u> であるとは，index set A が "$<$" によって well-order されて，任意の $\alpha \in A$ に対して $\{V_\beta \mid \beta < \alpha\}$ が $\mathcal{U}$ の中で cushioned となるとき。

<u>定理</u>3 (Hung [1]). normal space X に対して，その open cover $\{G_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ が normal であるための必要十分条件は，$\{G_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ が open refinement $\{V_{\alpha,n} \mid \alpha < \lambda,\ n \geqq 1\}$ で次の条件をみたすものをもつときである：

(i) $V_{\alpha,n} \subset Cl\, V_{\alpha,n} \subset V_{\alpha,n+1} \subset G_\alpha$,

(ii) $Cl(\cup\{V_{\beta,n} \mid \beta < \alpha\}) \subset \cup\{V_{\beta,k} \mid \beta < \alpha,\ k \geqq 1\}$.

ここで，定理2 が linearly cushioned の形で書けるかは知られていない。 つまり，

<u>問題</u>1. X を normal space, $\mathcal{G}$ をその open cover とするとき，

(1) $\mathcal{G}$ が open refinement $\mathcal{V} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ で，各 $\mathcal{V}_n$ が $\mathcal{V}_{n+1}$ の中で linearly cushioned であるものをもつならば，このとき，$\mathcal{G}$ は normal となるか？

(2) $\mathfrak{U}$ が、それ自身の中で linearly cushioned となる open refinement をもてば、このとき $\mathfrak{U}$ は normal か?

normal space を多少強めたとき、次の結果は簡単に示すことができる。

<u>命題</u> 1. X を normal, countably paracompact space, $\mathfrak{U}$ をその open cover とするとき、次は同値.

(1) $\mathfrak{U}$ は、normal である。

(2) $\mathfrak{U}$ は、σ-locally finite open refinement をもつ。

<u>命題</u> 2. X を collectionwise normal space, $\mathfrak{U}$ をその open cover とするとき、次は同値.

(1) $\mathfrak{U}$ は、normal である.

(2) $\mathfrak{U}$ は、σ-discrete closed refinement をもつ.

<u>命題</u> 3. X を collectionwise normal, countably paracompact space, $\mathfrak{U}$ をその open cover とするとき、次は同値.

(1) $\mathfrak{U}$ は、normal である。

(2) $\mathfrak{U}$ は、σ-locally finite closed refinement をもつ。

問題2．上の命題1～3において，定理2の(2)または(3)の形で，normal cover の nice characterization ができるか？

参考文献

[1] H. H. Hung, A note on Yajima's characterization of normal covers, Glasnik Mat. 21 (1986), 441-442.

[2] E. Michael, A note on paracompact spaces, Proc Amer. Math. Soc. 4 (1953), 831-838.

[3] ________, Yet another note on paracompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 309-314.

[4] K. Morita, Paracompactness and product spaces, Fund. Math. 50 (1962), 223-236.

[5] ________, Products of normal spaces with metric spaces, Ann. Math. 154 (1964), 365-382.

[6] A. H. Stone, Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 977-982.

[7] J. W. Tukey, Convergence and uniformity in topology, Princeton 1940.

[8] J. E. Vaughan, Linearly ordered collections and paracompactness, Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), 186-192.

[9] Y. Yajima, A characterization of normal covers of a normal space, Glasnik Mat. 18 (1983), 331-334.

[10] ________, A characterization of normal covers of a normal space II, (to appear).